

## **MODIFIKASI MODEL LOGISTIK UNTUK PERAMALAN PENDUDUK**

**Diandra Chika Fransisca**

Program Studi Teknik Informatika, STIKOM Yos Sudarso Purwokerto,  
JL. Smp 5 Karang Klesem Purwokerto, Jawa Tengah, 53144, Indoensia  
Email: [diandrachika10181993@gmail.com](mailto:diandrachika10181993@gmail.com)

**Abstrak :** Model logistik dapat dimodifikasi dengan menambahkan faktor migrasi sebagai fungsi bagi populasi. Fungsi ini mempertimbangkan adanya migrasi dan interaksi antara manusia yang terbatas oleh kemampuan daya dukung lingkungan. Model ini dapat diselesaikan secara kualitatif yaitu dengan menggunakan metode analisis titik keseimbangan dan secara kuantitatif yaitu dengan menggunakan metode diferensial tak eksak. Kedua metode ini memberikan hasil yang sama. Apabila kadar pertumbuhan intrinsik lebih besar daripada migrasi maka untuk jangka waktu yang lama, model akan bergantung pada faktor pertumbuhan intrinsik, kemampuan daya dukung lingkungan dan kadar migrasi. Selanjutnya, apabila pertumbuhan intrinsik kecil daripada migrasi maka untuk jangka waktu yang lama, model akan bergantung pada minus pertumbuhan intrinsik, kemampuan daya dukung lingkungan dan migrasi. Kemudian, apabila pertumbuhan migrasi sama dengan migrasi maka model tersebut menjadi model Malthus.

**Kata kunci:** Model logistik, modifikasi model logistik, migrasi, pertumbuhan penduduk

**Abstract :** The logistics model can be modified by adding migration factors as a function to the population. This function considers the existence of limited human migration and interaction by the ability of environmental carrying capacity. This model can be completed qualitatively by using the method of point balance analysis and quantitatively by using the exact undesired method of differential. Both of these methods give the same result. If the intrinsic growth rate is greater than for migration then for a long period of time, the model will depend on intrinsic growth factor, environmental carrying capacity and migration rate. Furthermore, if the intrinsic growth is small rather than migration then for a prolonged period of time, the model will depend on minus intrinsic growth, environmental carrying capacity and immigration. Then, if migration growth is the same as migration then the model becomes Malthus model

**Keyword :** Logistics model, modification of logistics model, migration, population growth

### **I. PENDAHULUAN**

Berdasarkan definisi de facto penduduk, jumlah penduduk (JP) adalah meliputi semua warga yang diperkirakan tanpa memandang status undang-undang kewarganegaraan kecuali untuk pengungsi yang tidak secara tetap menetap di negara asal mereka (World Bank, 2015). Dalam pembangunan, penduduk yang

berkualitas dapat mempercepat proses pembangunan. Demikian pula sebaliknya, penduduk yang kurang berkualitas akan menjadi beban kepada pembangunan. Oleh karena itu, dalam merancang pembangunan perlu dilakukan perumusan beberapa aturan. Untuk merancang suatu pembangunan diperlukan suatu peramalan mengenai JP. Peramalan JP dapat dilakukan, misalnya dengan menggunakan model matematika.

Model matematika untuk meramal JP adalah model pertumbuhan populasi (MPP). Model ini didasarkan pada faktor pertumbuhan penduduk seperti kelahiran, kematian, dan migrasi (Murray, 2002). Secara umum, MPP dapat dirumuskan sebagai

$$P'(t) = RP(t) + M \quad (1.1)$$

dengan  $t$ ,  $R$ ,  $P(t)$ , dan  $M$  secara berurutan adalah waktu, kadar pertumbuhan intrinsik, JP pada masa  $t$  dan kadar migrasi (kadar imigrasi (ditandai dengan  $m_i$ ) dikurangi (minus) kadar emigrasi (ditandai dengan  $m_e$ )). Selanjutnya, jika  $m_i \geq m_e$ , maka  $M \geq 0$ , selainnya  $M < 0$ .

Faktor migrasi (FM) boleh bernilai tetap atau sebagai fungsi yang bergantung pada populasi  $P(t)$  atau masa ( $t$ ). Dalam makalah ini, dipertimbangkan  $R = R(P, t)$  dan  $M = M(P, t)$  (Borelli and Coleman, 1987).

MPP yang mudah (hanya dipengaruhi oleh jumlah kelahiran dan kematian saja) adalah model Malthus (Edwards and Penney, 2008). Berdasarkan (1.1), model Malthus dirumuskan dengan  $M = 0$ , dan  $R$  bernilai positif ditandai sebagai  $r$ . Sementara itu, MPP yang dipengaruhi oleh hanya jumlah kelahiran, jumlah kematian dan kemampuan daya dukung lingkungan (KDDL) adalah model logistik (ML) (Edwards and Penney, 2008).

Berdasarkan (1.1), ML dirumuskan dengan  $M = 0$ , dan  $R$  sebagai fungsi bagi populasi terhadap masa (disebut  $h(P)$ ) (Boyce and DiPrima, 2009). Penggantian  $h(P)$  ke dalam (1.1) memberikan

$$P'(t) = dP/dt = h(P)P. \quad (1.2)$$

(1.2) merupakan modifikasi model Malthus. Untuk (1.2) dibuat persyaratan bahwa jika nilai  $P$  kecil, maka  $h(P) \cong r > 0$  dan jika nilai  $P$  besar, maka  $h(P) < 0$ .

Dengan demikian, fungsi  $h(P)$  menurun apabila nilai  $P$  menaik. Fungsi sederhana yang dapat memenuhi sifat-sifat tersebut adalah  $h(P) = r - bP(t)$  dengan  $b$  konstanta positif. Seterusnya, jika fungsi sederhana tersebut digantikan ke dalam (1.2), diperoleh

$$dP/dt = (r - bP(t))P \quad (1.3)$$

dengan  $r$  adalah kadar pertumbuhan intrinsik, yaitu kadar pertumbuhan yang terjadi apabila faktor keterbatasan lingkungan diabaikan dan  $b$  menyatakan tingkat persaingan antara individu dan untuk keperluan kajian inidiandaikan  $b > 0$ . (1.3) dapat dituliskembali sebagai

$$dP/dt = r(1 - (P/K))P \quad (1.4)$$

dengan  $K = r/b$  adalah KDDL. Untuk kajian ini, ditetapkan bahawa  $K > 1$  supaya sesuai dengan persyaratan yang diberikan kepada (1.2).

ML telah dimodifikasi dengan kapasiti KDDL sebagai fungsi (Safuan et al, 2012) dan dengan menambahkan "panen" (Laham et al, 2012). Dalam Rakhim (2015) ML telah dimodifikasi dengan menambahkan FM bernilai tetap  $M = q$  sehingga diperoleh

$$P'(t) = r(1 - (P(t)/K))P(t) + q. \quad (1.5)$$

Seiring dengan migrasi bukan konstanta, maka model tersebut kami kembangkan lagi dengan menjadikan FM sebagai fungsi yang kami sebut Modifikasi Model Logistik (MML). Fungsi dalam FM tersebut akan bergantung pada populasi. Oleh kerana itu, untuk MML, FM dikaji sebagai fungsi bagi populasi (lihat Bagian 3).

Cara membangun MML, penyelesaian MML dan simulasi penyelesaian model diterangkan dalam Bagian 3. Pencarian penyelesaian khusus bagi MML tersebut secara kuantitatif dibuat menggunakan metode persamaan diferensial tak eksak (PPTT) yang dibagi dalam dua kasus. Kasus 1 adalah  $(r - (\alpha - \beta) > 0)$  dimana kadar pertumbuhan intrinsik ( $r$ ) lebih besar dari kadar migrasi  $(\alpha - \beta)$  dan Kasus 2 adalah  $(r - (\alpha - \beta) < 0)$  dimana kadar pertumbuhan intrinsik lebih kecil daripada kadar migrasi. Kemudian, menggambar graf bagi setiap kasus dalam penyelesaian secara kuantitatif ini. Dalam penyelesaian

MML secara kualitatif untuk setiap Kasus 1 dan Kasus 2 menggunakan metode titik keseimbangan, akan dibuat analisis terhadap penyelesaian bagi PPTT apakah penyelesaian akan berada disekitar titik kesimbangan, menuju titik keseimbangan atau menjauhi titik keseimbangan. Selanjutnya, secara simulasi hasil penyelesaian model bagi setiap kasus dan untuk menggambar grafakan digunakan data  $r$ ,  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  dan dua nilai awal  $P_0$  yang berbeda bagi melihat perbedaan graf  $P(t)$  yang diperoleh.

## **II. METODE PENELITIAN**

Pada penelitian ini akan diterangkan cara menyelesaikan masalah model MML. MML dilakukan berdasarkan model pertumbuhan populasi pada (1.1) dengan mengandaikan  $M \neq 0$  dan  $M$  tidak bernilai tetap, melainkan  $M$  adalah suatu fungsi yang bergantung pada populasi (fungsi populasi). Fungsi populasi ini mempertimbangkan adanya kadar migrasi, interaksi antara setiap individu dan KDDL. MML melibatkan dua kasus: Kasus 1  $r > (\alpha - \beta)$  dan Kasus 2  $r < (\alpha - \beta)$ .

Langkah penyelesaian bagi model MML, dibuat dalam tiga tahap: secara kuantitatif (MML diselesaikan dengan metode PPTT), kualitatif (MML diselesaikan secara analisis yakni melibatkan teori titik keseimbangan) dan simulasi.

## **III. HASIL DAN PERBINCANGAN**

### **3.1 Penyelesaian secara kuantitatif**

Jumlah migrasi dalam suatu populasi untuk jangka masa yang lama tentu akan terbatas kerana faktor KDDL. Selain itu, kadar perubahan jumlah migrasi berbanding lurus dengan FM yakni, jumlah migrasi yang masuk ( $m_i = \alpha$ ) dikurangi jumlah migrasi yang keluar ( $m_e = \beta$ ). Interaksi antara setiap individu dalam populasi menimbulkan faktor pendorong dan penarik individu untuk melakukan migrasi. Misalkan populasi yang padat pada suatu wilayah menyebabkan interaksi antara individu terbatas sehingga mendorong individu

tersebut melakukan migrasi keluar. Oleh kerana itu, jumlah migrasi berbanding lurus juga dengan adanya interaksi antara setiap individu dalam populasi ( $P^2$ ). Dengan demikian, fungsi bagi populasi yang dapat dipertimbangkan dalam FM yaitu

$$M = ((m_i - m_e)P^2) / K = ((\alpha - \beta)P^2) / K \quad (3.1)$$

Jika (3.1) dimasukkan ke dalam (1.5), maka diperoleh model MML

$$dP / dt = rP(1 - (P / K)) + ((\alpha - \beta)P^2) / K = rP(1 - UP / rK), \quad U = r - (\alpha - \beta) > 0 \quad (3.2)$$

yang dapat ditulis sebagai

$$M(t, P) dt + N(t, P) dP = 0 \quad (3.3)$$

Yang merupakan persamaan diferensial tak eksak kerana  $\partial M / \partial P \neq \partial N / \partial t$  dengan

$$M(t, P) = -(rK / P) + r - (\alpha - \beta) \text{ dan } N(t, P) = K / P^2. \quad (3.3) \text{ perlu diubah}$$

menjadi persamaan diferensial eksak. Didefinisikan  $h(t)$ , seperti

$$h(t) = (\partial M / \partial P - \partial N / \partial t) / N(t, P) = ((rK / P^2) - 0) / (K / P^2) = r.$$

Definisikan faktor integral  $e^{rt}$  dan kalikan dengan (3.3) sehingga diperoleh

$$e^{rt} (-(rK / P) + r - (\alpha - \beta)) dt + e^{rt} (K / P^2) dP = 0. \quad (3.4)$$

Selanjutnya, misalkan  $M_n = e^{rt} (-(rK / P) + r - (\alpha - \beta))$  dan  $N_n = e^{rt} (K / P^2)$ ,

maka diperoleh  $\partial M_n / \partial P = \partial N_n / \partial t$ . Jadi, (3.4) persamaan diferensial

eksak. Selanjutnya penyelesaian khusus MML adalah

$$P = KP_0 / (P_0(1 - e^{r(t_0-t)})(r - (\alpha - \beta)) / r + Ke^{r(t_0-t)}). \quad (3.5)$$

Perhatikan  $P(t)$  dalam (3.5). Jelas  $P(0) = P_0$  sesuai dengan syarat awal. Apabila

$t \rightarrow \infty$ , maka

$$KP_0 / (P_0(1 - e^{r(t_0-t)})(r - (\alpha - \beta)) / r + Ke^{r(t_0-t)}) \rightarrow rK / (r - (\alpha - \beta)).$$

Sesungguhnya untuk  $P(t) > rK / (r - (\alpha - \beta))$  dapat ditunjukkan bahawa  $P(t_1) > P(t_2)$  jika  $t_1 < t_2$ . Jadi,  $P(t)$  menurun jika  $t$  naik. Begitu juga untuk  $P(t) < rK / (r - (\alpha - \beta))$  dapat ditunjukkan bahawa  $P(t_1) < P(t_2)$  jika  $t_1 < t_2$ . Jadi  $P(t)$  naik jika  $t$  naik.

Dengan memperkirakan untuk jangka waktu yang lama  $t \rightarrow \infty$  dan dengan sifat kemonotonan  $P(t)$ , dapat ditunjukkan bahwa  $P(t) < rK / (r - (\alpha - \beta))$  untuk  $t < \infty$ .

Graf penyelesaian MML dengan FM sebagai fungsi bagi populasi terbagi menjadi dua kasus yaitu kasus 1 ( $r - (\alpha - \beta) > 0$ ) dan kasus 2 ( $r - (\alpha - \beta) < 0$ ) seperti yang berikut.

**Kes 1** ( $r - (\alpha - \beta) > 0$ ): Dalam melukis graf penyelesaian model diperlukan sifat kemonotonan dan kecekungan graf. Jelas dari (3.2) dapat disimpulkan bahwa

1. Graf  $P(t)$  naik dalam  $[0, rK / (r - (\alpha - \beta))]$  kerana  $dP / dt > 0$ .
2. Graf  $P(t)$  menurun dalam  $rK / (r - (\alpha - \beta)) < P$  kerana  $dP / dt < 0$ .

Untuk menentukan kecekungan graf  $P(t)$ , diperlukan  $P''(t) = 0$ . Apabila persamaan (3.2) disubstitusikan terhadap  $t$  diperoleh

$$d^2 P / dt^2 = rP'(1 - (2P(r - (\alpha - \beta))) / rK) \quad (3.6)$$

Supaya  $P''(t) = 0$ , maka dari (3.6) diperoleh  $P = rK / 2(r - (\alpha - \beta))$ . Maka diperoleh

1. Graf  $P(t)$  cekung ke atas dalam  $[0, rK / 2(r - (\alpha - \beta))]$  kerana  $d^2 P / dt^2 > 0$ .
2. Titik  $(t, P(t)) = (t, rK / 2(r - (\alpha - \beta)))$  adalah titik belok kerana  $d^2 P / dt^2 = 0$
3. Graf  $P(t)$  cekung ke bawah dalam  $(rK / 2(r - (\alpha - \beta)), rK / (r - (\alpha - \beta)))$  kerana  $d^2 P / dt^2 < 0$
4. Graf  $P(t)$  cekung ke atas dalam selang  $rK / (r - (\alpha - \beta)) < P$  kerana  $d^2 P / dt^2 > 0$

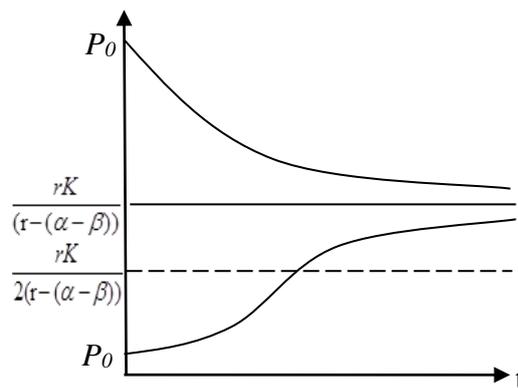
Dengan demikian, graf penyelesaian (3.2) ditunjukkan dalam Gambar 3.1.

Perhatikan Gambar 3.1, dalam selang  $[P_0, rK / (r - (\alpha - \beta))]$  populasi naik bersamaan dengan waktu dan terbatasi di atas oleh supremum (batas atas terkecil)  $rK / (r - (\alpha - \beta))$ . Dalam  $[P_0, rK / (2(r - (\alpha - \beta)))]$ , graf cekung ke atas, berarti kadar perubahan populasi naik secara eksponen terhadap waktu. Dalam  $[rK / (2(r - (\alpha - \beta))), rK / (r - (\alpha - \beta))]$ , graf cekung ke bawah, tetapi kadar

perubahan populasi masih naik secara logaritma terhadap waktu dan terbatas di atas oleh supremum  $rK / (r - (\alpha - \beta))$ .

**Gambar 3.1:** Graf Penyelesaian MML dengan FM sebagai FPkes 1 ( $r - (\alpha - \beta) > 0$ )

Dalam selang  $(rK / (r - (\alpha - \beta)), P_0]$ , graf cekung ke atas, tetapi populasi berkurang seiring waktudan terbatas dibawah oleh infimum (batas bawah terbesar)  $rK / (r - (\alpha - \beta))$ . Ini berarti, untuk jangkawaktu yang lama JP akan mendekati



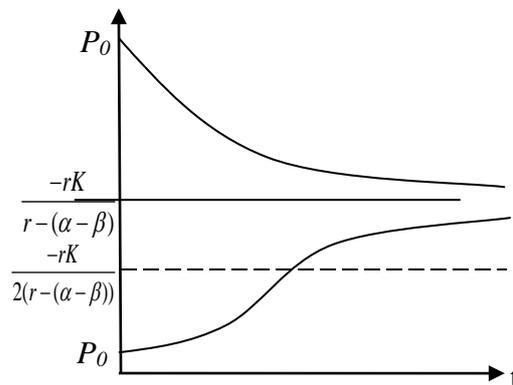
infimumitu.

**Kasus 2** ( $r - (\alpha - \beta) < 0$ ) :Jikadalam (3.2),  $r - (\alpha - \beta) < 0$ , maka

$$dP/dt = rP(1 + UP/rK), \quad U = r - (\alpha - \beta). \quad (3.7)$$

Analog dengan penyelesaian persamaan (3.2) dengan menggunakan metode persamaan diferensial tak eksak diperoleh penyelesaian khusus bagi(3.7) adalah

$$P = KP_0 / (-P_0(1 - e^{r(t_0-t)})(r - (\alpha - \beta)) / r + Ke^{r(t_0-t)}). \quad (3.8)$$



Graf penyelesaian model logistik dengan faktor migrasi sebagai fungsi bagi populasi untuk kasus 2 ( $r - (\alpha - \beta) < 0$ ), diberikan dalam Gambar 3.2.

Perhatikan gambar 3.2, dalam  $[P_0, -rK / (r - (\alpha - \beta))]$  populasi naik seiring waktu dan terbatas di atas oleh supremum  $-rK / (r - (\alpha - \beta))$ . Dalam  $[P_0, -rK / (2(r - (\alpha - \beta)))]$ , graf cekung ke atas, ini menunjukkan kadar perubahan populasi naik secara sebanding terhadap waktu. Dalam  $[-rK / (2(r - (\alpha - \beta))), -rK / (r - (\alpha - \beta))]$ , graf cekung ke bawah, tetapi kadar perubahan populasi masih naik secara logaritma terhadap waktu dan terbatas di atas oleh supremum  $-rK / (r - (\alpha - \beta))$ . Dalam  $(-rK / (r - (\alpha - \beta)), P_0]$ , graf cekung ke atas, tetapi populasi menurun seiring waktu dan terbatas di bawah oleh infimum  $-rK / (r - (\alpha - \beta))$ . Ini berarti, untuk jangka waktu yang lama JP akan mendekati infimum itu. Selanjutnya, jika pada persamaan (3.2),  $r - (\alpha - \beta) = 0$ , maka akan diperoleh model Malthus.

### 3.2 Penyelesaian secara kualitatif

Secara kualitatif model tersebut dapat diselesaikan menggunakan metode analisis kestabilan titik keseimbangan (genting). Definisi berikut diperlukan:

**Definisi 4.1 (Titik Keseimbangan (Genting)):** Titik  $y^*$  disebut titik keseimbangan otonomus bagi persamaan diferensial  $dy/dt = F(y)$  jika  $F(y^*) = 0$ . ♦ (Edwards and Penney, 2008).

**Definisi 4.2 (Kriteria Kestabilan):** Titik kesimbangannya  $y^*$  bagi persamaan diferensial  $dy/dt = F(y)$  dikatakan stabil jika  $F'(y^*) < 0$ , dan tidak stabil jika  $F'(y^*) > 0$ . ♦ (Edwards and Penney, 2008).

Jika titik keseimbangany\* stabil, maka penyelesaian bagi persamaan diferensial akan berada disekitar titik keseimbangan itu. Jika titik keseimbangan y\* stabil secara berasimtot, maka penyelesaian bagi persamaan diferensial akan menuju titik keseimbangan untuk jangka waktu yang lama. Kemudian, jika titik keseimbangan y\* tidak stabil, maka penyelesaian bagi persamaan diferensial akan menjauhi dari titik keseimbangan. Dengan mempertimbangkan kasus-kasus yang telah dibahas diatas, maka.

**Kasus 1** ( $r - (\alpha - \beta) > 0$ ): MML dengan migrasi (3.2) dapat diselesaikan secara kualitatif dengan menganalisis model di sekitar titik keseimbangan model. Misal  $dP/dt = F(P)$  maka (3.2) dapat ditulis

$$F(P) = rP(1 - UP/(rK)) \quad (4.1)$$

Titik keseimbangan bagi MML(3.2) dapat diketahui jika  $F(P) = 0$ . Jadi  $rP(1 - UP/(rK)) = 0$ , maka titik keseimbangan bagi model adalah  $P_1 = 0$  dan  $P_2 = rK/U$ .

Titik keseimbangan  $P_1 = 0$  disebut tidak stabil karena  $F'(0) = r$  dengan  $r > 0$ . Jadi  $F'(0) > 0$ . Titik keseimbangan  $P_2 = rK/U$  disebut stabil karena  $F'(rK/U) = -r$  dengan  $r > 0$ . Jadi  $F'(rK/U) < 0$ . Penyelesaian model untuk jangka waktu yang lama, adalah

$$\lim_{t \rightarrow \infty} KP_0 / (P_0(1 - e^{r(t_0-t)})(U/r) + Ke^{r(t_0-t)}) = rK/U, \quad U = r - (\alpha - \beta) > 0 \quad (4.2)$$

Ini berarti titik keseimbangan  $P_2 = rK/U$  adalah titik stabil secara asimtotik. Di sisi lain untuk jangka waktu yang lama, JP akan menuju nilai maksimumnya yaitu  $rK/U$ , dengan  $U = r - (\alpha - \beta)$ . Dengan demikian tidak terjadi pertumbuhan populasi.

**Kasus 2:** ( $r - (\alpha - \beta) < 0$ ):

MML dengan migrasi (3.7) dapat diselesaikan secara kualitatif dengan menganalisis model

di sekitar titik keseimbangan model. Misalkan  $dP/dt = F(P)$ , maka (3.7) dapat ditulis

$$F(P) = rP(1 + UP/(rK)) \quad (4.3)$$

Titik keseimbangan bagi modifikasimodel logistik (3.7) dapat diketahui jika

$$0 = F(P) = rP(1 + UP/(rK))$$

Jadi titik keseimbangannya adalah

$$P_1 = 0 \quad \text{dan} \quad P_2 = -rK/U.$$

Jelas titik keseimbangan  $P_1 = 0$  adalah tidak stabil kerana  $F'(0) = r > 0$ .

Sementara titik keseimbangan  $P_2 = -rK/U$  adalah stabil kerana  $F'(-rK/U) = -r < 0$ . Penyelesaian model persamaan pembezaan (3.7) untuk jangka waktu yang lama,

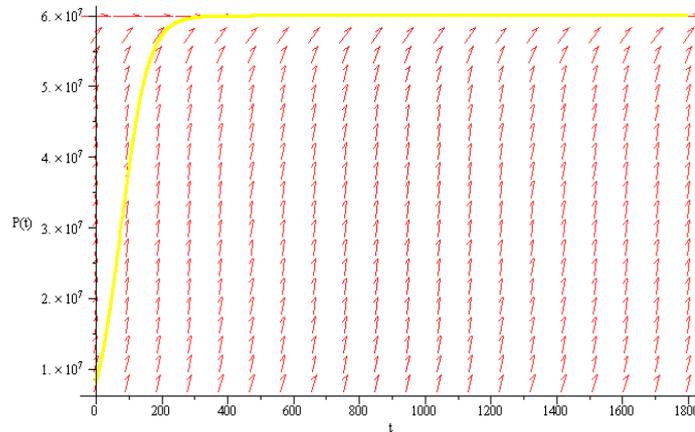
$$\lim_{t \rightarrow \infty} KP_0 / (-P_0(1 - e^{r(t_0-t)})(U/r) + Ke^{r(t_0-t)}) = -\frac{rK}{U}, U = r - (\alpha - \beta) < 0 \quad (4.4)$$

Ini berarti titik keseimbangan  $P_2 = -rK/U$  adalah titik stabil secara asimtotik. Di sisi lain untuk jangka waktu yang lama, JP akan menuju nilai maksimumnya yaitu  $-rK/U$ , dengan  $U = r - (\alpha - \beta)$ . Dengan demikian tidak terjadi pertumbuhan populasi.

### 3.3 Simulasi Model

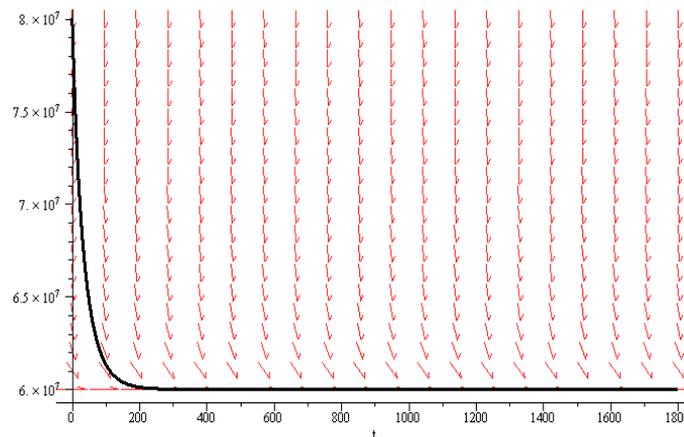
Secara simulasi, kita melukis graf  $P(t)$  menggunakan data  $r, K, \alpha, \beta$  dan sebelas nilai awal  $P_0$  yang berbeda bagi melihat integral graf  $P(t)$  (MML) yang diperoleh. Namun begitu, penelitain ini hanya menjabarkan dua nilai awal  $P_0$  saja dikarenakan keserupaan graf yang diperoleh. Penelitian ini juga akan menunjukkan bahwa nilai  $rK/(r - (\alpha - \beta))$  dan  $-rK/(r - (\alpha - \beta))$  yang diperoleh adalah sama untuk  $P(t)$  yang berbeda. Untuk mendukung konfirmasi MML, disertakan Contoh 5.1 dan Contoh 5.2 bagi Kasus 1 ( $r - (\alpha - \beta) > 0$ ) dan Contoh 5.3 dan Contoh 5.4 bagi Kasus 2 ( $r - (\alpha - \beta) < 0$ ):

**Contoh 5.1:** Untuk nilai  $r = 0.024248123$ ,  $K = 29,654,426$ ,  $(\alpha - \beta) = 0.012263721$ ,  $P(0) = 8,000,000$  dan  $t = 0 \dots 1800$ , graf penyelesaian model (3.2) adalah seperti dalam Gambar 5.1. ♦



**Gambar 5.1 :** Simulasi 1  $r > (\alpha - \beta)$  dan  $P(0) < (rK / r - (\alpha - \beta))$ .

**Contoh 5.2:** Untuk nilai  $r = 0.024248123$ ,  $K = 29,654,426$ ,  $(\alpha - \beta) = 0.012263721$ ,  $P(0) = 80,000,000$  dan  $t = 0..1800$ , graf penyelesaian model (3.2) adalah seperti dalam Gajah 5.2. ♦

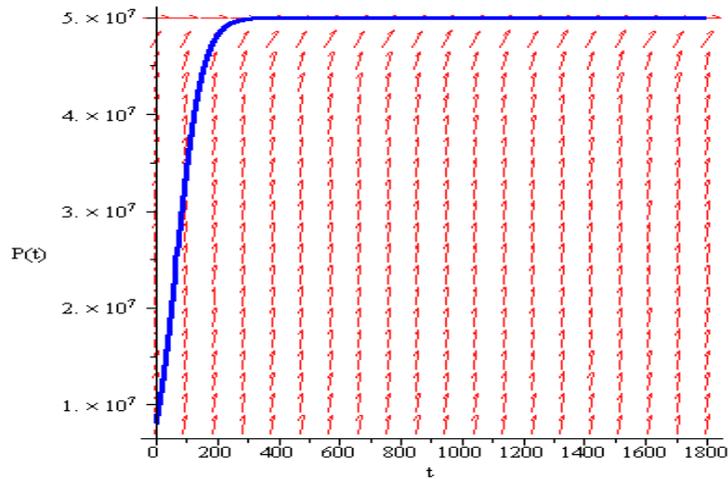


**Gambar 5.2 :** Simulasi 2  $r > (\alpha - \beta)$  dan  $P(0) > (rK / r - (\alpha - \beta))$ .

Dari Gambar 5.1 dan 5.2 yang diperoleh untuk jangka waktu yang lama pada Kasus 1 dengan nilai  $P(0)$  yang berbeda didapati bahwa populasi akan terbatas dalam nilai yang sama yaitu

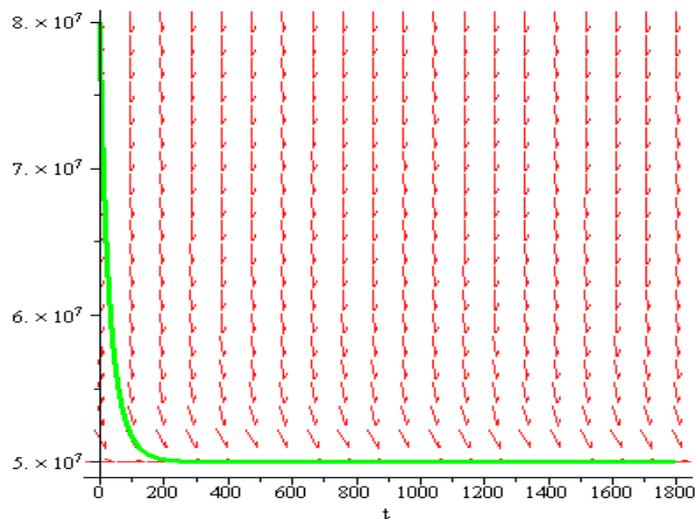
$$rK / (r - (\alpha - \beta)) = 0.02428123 \times 29,654,426 \div (0.02428123 - 0.012263721) = 60,000,000.$$

**Contoh 5.3:** Untuk nilai  $r = 0.024248123$ ,  $K = 111,767,136$ ,  $q = 0.078450988$ ,  $P(0) = 8,000,000$  dan  $t = 0..1800$ , graf penyelesaian model (3.7) adalah seperti dalam Gambar5.3. ♦



**Gambar 5.3 :** Simulasi 3  $r < (\alpha - \beta)$  dan  $P(0) < (rK / r - (\alpha - \beta))$ .

**Contoh 5.4 :** Untuk nilai  $r = 0.024248123$ ,  $K = 111,767,136$ ,  $q = 0.078450988$ ,  $P(0) = 80,000,000$  dan  $t = 0..1800$ , graf penyelesaian model (3.7) adalah seperti dalam Gambar 5.4.



**Gambar 5.4:** Simulasi 4  $r < (\alpha - \beta)$  dan  $P(0) < (rK / r - (\alpha - \beta))$ .

Dari Gambar 3.5 dan 3.6 yang diperoleh untuk jangka waktu yang lama pada Kasus 2 dengan nilai  $P(0)$  yang berbeda didapati bahwa populasi akan terbatas dalam nilai yang sama

$$-rK / (r - (\alpha - \beta)) = -0.02428123 \times 111,767,136 \div (0.02428123 - 0.078450988) = 50,000,000.$$

### 3.4 Diskusi

Model MML terbagi menjadi dua Kasus, yakni : **Kasus 1** :  $r - (\alpha - \beta) > 0$  dan **Kasus2** :  $r - (\alpha - \beta) < 0$ . Untuk kasus 1, diandaikan dalam suatu populasi memiliki kadar pertumbuhan intrinsik ( $r$ ) yang besar tetapi memiliki kadar migrasi ( $\alpha - \beta$ ) yang kecil. Hal ini mengakibatkan  $U = r - (\alpha - \beta)$  dalam model akan bernilai positif ( $+U$ ) hingga diperoleh (3.2). Akan tetapi, untuk kasus 2 jika dalam suatu populasi memiliki kadar pertumbuhan intrinsik lebih kecil berbanding kadar migrasi, maka  $U = r - (\alpha - \beta)$  dalam model akan bernilai negatif ( $-U$ ). Dengan demikian, jika nilai ( $-U$ ) digantikan kedalam (3.2), maka diperoleh (3.7).

Gambar 3.1 merupakan graf penyelesaian Kasus 1. Sebagai contoh, terdapat sebuah negara dengan kadar pertumbuhan penduduk tinggi. Nilai populasi awal  $P(0) > (rK / r - (\alpha - \beta))$ . Dengan kadar pertumbuhan populasi yang tinggi dan terbatasnya KDLL di negara tersebut maka seiring waktu akan terjadi persaingan untuk dapat bertahan hidup. Interaksi populasi dalam persaingan inilah yang membuat banyaknya populasi yang tidak bisa bertahan ditengah KDLL yang semakin berkurang, sehingga seiring waktu, JP akan menurun tetapi tetap terbatas dibawah oleh infimum  $rK / (r - (\alpha - \beta))$ .

Selanjutnya, misalnya terdapat sebuah negara dengan kadar pertumbuhan penduduk rendah. Nilai populasi awal  $P(0) < (rK / r - (\alpha - \beta))$ . Dengan kadar pertumbuhan populasi yang rendah dan masih banyaknya KDLL di negara tersebut, maka seiring waktu akan terjadi persaingan untuk dapat bertahan hidup. Interaksi populasi dalam persaingan inilah yang membuat banyaknya populasi tertarik untuk mendapatkan KDLL lebih banyak, sehingga seiring waktu jumlah populasi akan terus naik tetapi tetap terbatas diatas oleh supremum  $rK / (r - (\alpha - \beta))$ . Untuk Gambar 3.2 analog dengan penjelasan Gambar 3.1.

Simulasi dari hasil setiap kasus penyelesaian model dibedakan menjadi 2. Untuk Kasus 1 dengan  $P(0) < (rK / r - (\alpha - \beta))$ , misalkan di Negara A, mempunyai kadar pertumbuhan intrinsik 0.024248123, KDLL 29,654,426, kadar migrasi 0.012263721, dan JP pada tahun 2000 yaitu 8,000,000 (populasi awal). Misal, ingin mengetahui ramalan JP dengan menggunakan modifikasi model tersebut pada

tahun 2000 hingga 3800 maka dengan bantuan software Maple 13 dengan  $t=0..1800$  dapat dicari ramalan graf penyelesaian bagi model (3.2) adalah seperti dalam Gambar 5.1.

Untuk Kasus1 dengan  $P(0) > (rK / r - (\alpha - \beta))$ , misalkan di Negara B, memiliki kadar pertumbuhan intrinsik 0.024248123, KDLL 29,654,426 , kadar migrasi 0.012263721, dan JP pada tahun 2000 yaitu 80,000,000 (populasi awal). Misal ingin mengetahui ramalan JP dengan menggunakan modifikasi model tersebut pada tahun 2000 hingga 3800 maka dengan bantuan software Maple 13 dengan  $t=0..1800$  dapat dicari ramalan graf penyelesaian bagi model (3.2) adalah seperti dalam Gambar 5.2. Kasus 1 dengan nilai  $P_0$  yang berbeda akan terbatas dengan nilai maksimum populasi yang sama yaitu 60,000,000.

#### IV. KESIMPULAN

MML dengan migrasi sebagai fungsipopulasi adalah  $dP/dt = rP(1 - (P/K)) + ((\alpha - \beta)P^2)/K$ . Jika  $r - (\alpha - \beta) > 0$ , maka  $P = KP_0 / (P_0(1 - e^{r(t_0-t)})((r - (\alpha - \beta))/r) + Ke^{r(t_0-t)})$  penyelesaiannya untuk jangka waktu yang lama JP menuju maksimum  $rK / (r - (\alpha - \beta))$ . Jika  $r - (\alpha - \beta) < 0$ , maka  $P = KP_0 / (-P_0(1 - e^{r(t_0-t)})((r - (\alpha - \beta))/r) + Ke^{r(t_0-t)})$  penyelesaiannya untuk jangka waktu yang lama JP menuju maksimum  $-rK / (r - (\alpha - \beta))$ . MLT ini dapat digunakan untuk meramal JP pada masa depan kerana faktor yang dipertimbangkan tidak hanya faktor kelahiran dan kematian tetapi juga faktor migrasi.

#### DAFTAR RUJUKAN

- Borelli, R. and Coleman, C. S. 1987. *Differential Equation, A Modelling Approach*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.
- Boyce, W. E., & DiPrima R. C. 2009. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, Ninth Edition. New York: John Wiley & Sons.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. 2008. *Elementary Differential Equations, Sixth Edition*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Laham, M. F., Krishnurajah, I. S., & Sharif, J. M. 2012. Fish Harvesting Management Strategies Using Logistic Growth Model. *Journal of Sains Malaysiana*. 41(2):171-177.

Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology, Second Corrected Edition*. Berlin Heidelberg: Springer-Varley.

Rakhim, A. A. 2015. *Model Logistik dengan Migrasi dan Aplikasinya pada Data Penduduk Kelurahan Purwanegara Kecamatan Purwokerto Utara* [Logistic Model with Migration and Application for Population Data at Kelurahan Purwanegara, Kecamatan Purwokerto Utara] (Thesis (unpublished), Jenderal Soedirman University).

Safuan, H.M., Towers, I. N., Javanoski, Z., & Sidhu, H. S. 2012. Coupled Logistic Carrying Capacity Model. *Journal of EMAC 2011*. 53: C127-C184.

The World Bank. 2015, retrieved from [data.worldbank.org/indicator/SP.POP.TOTL?](http://data.worldbank.org/indicator/SP.POP.TOTL?)